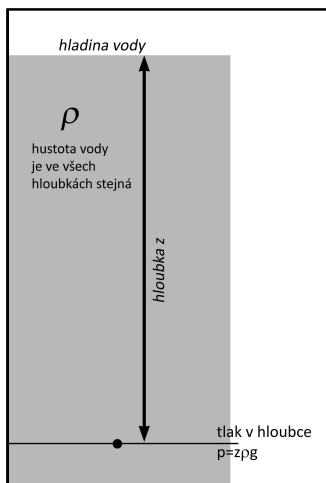


Fyzikální praktikum — měření tlaku vzduchu a výpočet výškového rozdílu

Potápěč ve vodě může spočítat tlak, který na něho působí, jednoduše podle hydrostatické rovnice

$$p = z\rho g$$

kde p je tlak v hloubce z , ρ je hustota vody. V této rovnici jsme jako označení hloubky použili souřadnici z namísto obvyklého označení h , ale je to totéž. Protože hustota vody je ve všech hloubkách konstantní (voda považujeme za **nestlačitelnou**), narůstá tlak vody s rostoucí hloubkou **lineárně**. V atmosféře je tomu jinak, protože je to plyn, který je **stlačitelný**. Spodní vrstvy atmosféry jsou zatíženy celou atmosférou nad nimi a mají tak vysokou hustotu, zatímco vrchní vrstvy atmosféry jsou stlačovány jen málo a atmosférický tlak s rostoucí výškou klesá nelineárně. U hladiny moře se s rostoucí výškou mění tlak velmi rychle, postupně je pak ve větší výšce tato změna stále menší. Je známo, že u hladiny moře se musí vystoupat přibližně o 8 m výšky, aby tlak poklesl o 1 hPa. Ve výšce asi 5500 m nadmořské výšky je tento krok asi 16 m, ve výšce 11000 m se musí vystoupat asi 32 m, aby tlak vzduchu poklesl o 1 hPa. Takový krok, při kterém se tlak změní o 1 hPa, se nazývá **barometrický stupeň**.



Odvodíme si **barometrickou rovnici**, která dává do souvislosti výškový rozdíl a tlakový rozdíl. Protože vzduch, stejně jako jiné látky, podléhá teplotní roztažnosti, bude v barometrické rovnici hrát roli také teplota vzduchu. Pro formulaci rovnice musíme použít vyšší matematiku, která se na gymnáziu neučí.

Vedle **hydrostatické rovnice** (viz nahoře) musíme vzít v úvahu **stavovou rovnici**:

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

kde ρ je hustota plynu, p je tlak, R je měrná plynová konstanta (pro suchý vzduch je $R=287 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$) a T je teplota v Kelvinech.

Nyní udělejme tuto úvahu: Protože se hustota a tlak v atmosféře nelineárně mění s výškou, musíme vzít sloupec vzduchu od hladiny moře až na horní hranici atmosféry, ten rozdělíme na velké množství tenkých vrstviček, a v každé z nich budeme považovat hustotu za konstantní. Bude to připomínat tenké plátky sýra, naskládané na sebe. Spodní plátek bude mít nejvyšší hustotu, protože bude zatížený všemi dalšími plátky nad ním. Druhý plátek bude zatížený o něco méně, třetí plátek opět o něco méně, atd., až nejvrchnější plátek nad sebou nebude mít žádnou zátěž. Pro každý plátek/vrstvu atmosféry si vyjádříme tlak pomocí hydrostatické rovnice, a celkový tlak celého sloupce pak bude součet tlaků v jednotlivých vrstvičkách:

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{i=1}^n p_i$$

Nahradíme p z hydrostatické rovnice:

$$p = \sum_{i=1}^n (\rho_i)g\Delta z$$

kde ρ_i je hustota v i -té vrstvičce, g je tíhové zrychlení (= konstanta) a Δz je výška každé vrstvičky (velmi tenká). Z tohoto vyjádření přejdeme na „lepší“ součet pomocí integrálu, tj. sumační symbol Σ nahradíme integrálem a tloušťku vrstvičky Δz potom diferencíálem dz , což je nekonečně malý, ale nikoliv nulový (tzv. *infinitesimální*) přírůstek:

$$\int dp = - \int \rho g dz$$

Výraz dp znamená přírůstek, resp. změnu tlaku. Znaménko mínus na pravé straně u integraálu značí, že hustota s rostoucí výškou ubývá. Konstantu možno vytknout před integrál, takže upravíme:

$$\int dp = -g \int \rho dz$$

Hustotu v integrandu nyní nahradíme ze stavové rovnice:

$$\int dp = -g \int \frac{p}{RT} dz$$

R , T jsou konstanty, rovněž je vytkneme před integrál:

$$\int dp = -\frac{g}{RT} \int p dz$$

Musíme separovat proměnné — vezmeme tlak p z pravé strany a přesuneme jej na levou stranu rovnice, jinak by to nešlo integrovat:

$$\int \frac{1}{p} dp = -\frac{g}{RT} \int dz$$

Integrace pravé strany rovnice je jednoduchá, protože $\int dz = z$. Na levé straně je integrál $\int \frac{1}{p} dp$ a výsledkem integrace je přirozený logaritmus proměnné, kterou je tlak p . Ještě musíme rovnici vylepšit, protože se jedná o **určité integrály**, kdy na levé straně integrujeme od tlaku p_1 do tlaku p_2 (to je pro nás důležité, to jsou ty dva tlaky v dolní a horní výškové hladině, které změříme barometrem), na pravé straně integrujeme od výškové hladiny z_1 do výškové hladiny z_2 . Správný zápis předchozí rovnice bude vypadat takto:

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p} dp = -\frac{g}{RT} \int_{z_1}^{z_2} dz$$

Po integraci tedy dostáváme

$$(\ln p_2 - \ln p_1) = -\frac{g}{RT} (z_2 - z_1)$$

Výškový rozdíl $z_2 - z_1$ si označíme Δz a ještě upravíme levou stranu rovnice, když víme, že rozdíl logaritmů je logaritmus podílu:

$$\ln \frac{p_2}{p_1} = -\frac{g \Delta z}{RT}$$

Tuto rovnici upravíme, abychom mohli spočítat Δz , když známe tlak v dolní výšce (p_1) a horní výšce (p_2):

$$-\frac{RT}{g} \ln \frac{p_2}{p_1} = \Delta z$$

Toto je pro nás ta **hlavní rovnice**, ze které budeme počítat výškový rozdíl, když známe oba tlaky. V rovnici figuruje ještě teplota, za kterou bychom měli dosadit průměrnou teplotu vrstvy mezi oběma výškami.

Barometrická rovnice vznikne odlogaritmováním předchozího výrazu, tj. dostaneme:

$$\frac{p_2}{p_1} = e^{-\frac{g\Delta z}{RT}}$$

neboli

$$p_2 = p_1 e^{-\frac{g\Delta z}{RT}}$$

kde p_2 je „horní tlak“, p_1 je „dolní tlak“, e je Eulerovo číslo 2,71. Výraz Δz vyjadřuje vertikální tloušťku vzduchové vrstvy, T je její průměrná teplota.

Příklad

Barometrem jsme změřili v dolní výšce tlak 950,1 hPa. V horní výšce potom tlak 940,7 hPa. Průměrná teplota vzduchu byla 16 °C. Jaký je výškový rozdíl mezi oběma tlakovými hladinami?

Teplotu 16 °C si převedeme na Kelviny, tj. 16+273=289 K. Hodnotu tlaku ponecháme v hPa (nemusíme převádět na Pa, poměr by byl stejný). Dosadíme do hlavní rovnice:

$$-\frac{287.289}{9,81} \cdot \ln\left(\frac{940,7}{950,1}\right) = 84,07 \text{ m}$$

Výškový rozdíl je při zjištěných tlacích a dané teplotě 84,07 metru.

Zkoušejte další výpočty, jak se změní výškový rozdíl, když se zadá jiná teplota. Například při teplotě 30 °C vyjde výškový rozdíl 88,14 metru — protože teplejší vzduch je víc expandovaný, sloupec vzduchu se teplotní roztažností protáhl do větší výšky.

Příklad

Nyní uděláme opačný výpočet. Známe tlak vzduchu v nulové nadmořské výšce $p_1=1013$ hPa, a potřebujeme vědět, jaký bude tlak ve výšce 2000 m. Teplota vzduchu u hladiny moře je 20 °C, teplota klesá s výškou o 1 °C na každých 100 metrů — to se nazývá vertikální teplotní gradient. Z tohoto údaje snadno spočítáme teplotu ve 2000 m: výškový rozdíl je 20 stovek metrů, tj. teplota od hladiny moře do výšky 2000 m klesne o 20 °C, takže v hladině 2000 m bude 0 °C. Průměrnou teplotu vrstvy zjistíme jednoduše tak, že vezmeme teplotu uprostřed této vrstvy, tj. v tomto případě to bude 10 °C = 283 K. Tato data dosadíme do barometrické rovnice:

$$p_2 = 1013 \cdot e^{-\frac{9,81 \cdot 2000}{287.283}}$$

a výsledek je $p_2 = 795,6$ hPa.

Zkusme změnit teplotu vrstvy; u hladiny moře nechť je -20 °C, pak ve výšce 2000 m bude 0 °C a průměrná teplota celé vrstvy bude -10 °C, tj. 263 K. Po dosazení do barometrické rovnice dostaneme tlak $p_2 = 781,1$ hPa. Ve studeném vzduchu bude v dané výšce nižší tlak, protože studenější

sloupec vzduchu je vlivem teplotní roztažnosti více zkomprimovaný (smrštěný) a tím pádem se do výškové hladiny posune shora nižší tlaková hladina. Kdybychom v této hladině měřili výšku barometrickým výškoměrem, ukáže nám vlivem nižšího tlaku vyšší nadmořskou výšku, než jaká tam ve skutečnosti je — je to známá odchylka (deviace) barometrického výškoměru. V Německu se říká, že „v zimě jsou hory vyšší“, což je důsledek těchto poznatků. Hory jsou samozřejmě stejně vysoké, ale barometr ukazuje zdánlivě vyšší výšku.

V laboratorní práci zpracujte měření barometrem a v protokolu napište diskusi výsledků, vycházející z tohoto listu.